

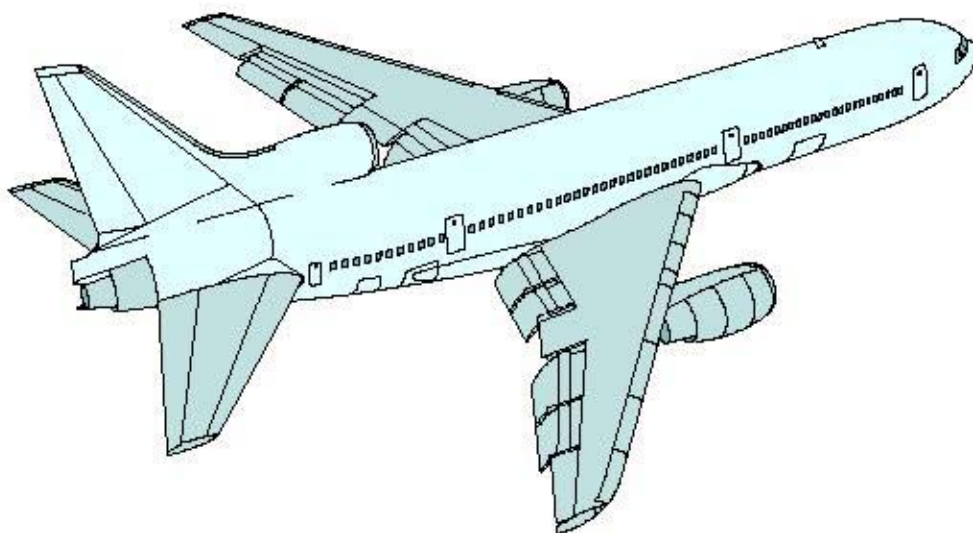
# “¿Por qué vuela un avión? Las Matemáticas tienen la respuesta.”

**Autor:** *Ricardo San Martín Molina*

**Resumen:** Explicación de los fundamentos matemáticos que hacen que un avión pueda volar.

**Palabras clave:** Matemáticas, aeronáutica.

# ¿Por qué vuela un avión...? Las Matemáticas tienen la respuesta



## 1. INTRODUCCIÓN

La relevancia y el peso que tienen las Matemáticas en todas las ciencias es evidente. Sin embargo, a menudo nos perdemos al profundizar excesivamente en modelos matemáticos, demostraciones y rigorización formal. Todos nos hemos preguntado alguna vez algo tan aparentemente simple como "¿por qué vuela un avión?". En este artículo daremos brevemente la respuesta a esta interesante pregunta desde un punto de vista matemático. La idea no es sólo descubrir el trasfondo matemático que subyace tras el vuelo de una aeronave, sino también servir de ejemplo para los alumnos y demostrar que las Matemáticas tienen importantes aplicaciones prácticas en la vida real, y más concretamente en la Aeronáutica.

La Aerodinámica es la parte de la mecánica de fluidos que estudia los gases en movimiento y las fuerzas o reacciones a las que están sometidos los cuerpos que se hallan en su seno. A la importancia propia de la aerodinámica hay que añadir el valor de su aportación a la aeronáutica.

Hay ciertas leyes de la aerodinámica, aplicables a cualquier objeto moviéndose a través del aire, que explican el vuelo de objetos más pesados que el aire. Para el estudio del vuelo, es lo mismo considerar que es el objeto el que se mueve a través del aire, como que este objeto esté inmóvil y es el aire el que se mueve (de esta última forma se prueban en los túneles de viento prototipos de aviones).

## 1.1 Teorema de Bernoulli.

Daniel Bernoulli comprobó experimentalmente que "la presión interna de un fluido (líquido o gas) decrece en la medida que la velocidad del fluido se incrementa".

### Teorema de Bernoulli:

En flujos isentrópicos y estacionarios, la cantidad  $1/2 \|\mathbf{u}\|^2 + \omega$  es constante a lo largo de las líneas de corriente. El mismo resultado es cierto para flujos incompresibles homogéneos ( $\rho = \rho_0$  respecto a  $x$ ), en tal caso:

$$1/2 \rho_0 \|\mathbf{u}\|^2 + p = K$$

El primer sumando es la energía cinética y el segundo corresponde a la presión

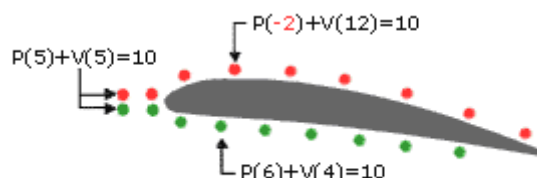
Recordemos que para obtener esta fórmula, puesto que  $\nabla \omega = \nabla p / \rho_0 \Rightarrow \omega = p / \rho_0$  luego:

$$1/2 \|\mathbf{u}\|^2 + p / \rho_0 = k \text{ y multiplicando por } \rho_0 \text{ obtenemos:}$$

$$1/2 \rho_0 \|\mathbf{u}\|^2 + p = k \rho_0$$

Para que se mantenga esta constante **K**, si una partícula aumenta su velocidad (la notamos por **u**) será a costa de disminuir su presión **p**, y viceversa.

En el siguiente ejemplo vemos el anterior teorema aplicado a un flujo de aire que fluye por una sección de ala del avión. Más adelante explicaremos el porqué de la forma del ala.



Se puede considerar el Teorema de Bernoulli como una derivación de la Ley de Conservación de la Energía. El aire está dotado de presión **p**, y este aire con una densidad constante  **$\rho_0$**  fluyendo a una velocidad **u** contiene energía cinética lo mismo

que cualquier otro objeto en movimiento ( $1/2 \rho_0 \|\mathbf{u}\|^2 = \text{energía cinética}$ ). Según la ley de la conservación de la energía, la suma de ambas es una constante:  $\mathbf{p} + (1/2 \rho_0 \|\mathbf{u}\|^2) = \mathbf{K}$ . A la vista de esta ecuación, para una misma densidad (asumimos que las partículas de aire alrededor del avión tienen igual densidad) si aumenta la velocidad  $\mathbf{u}$  disminuirá la presión  $\mathbf{p}$  y viceversa.

Enfocando este teorema desde otro punto de vista, se puede afirmar que en un fluido en movimiento la suma de la presión estática  $\mathbf{p}_e$  (la  $\mathbf{p}$  del párrafo anterior) más la presión dinámica  $\mathbf{p}_d$ , denominada presión total  $\mathbf{p}_t$  es constante:

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_d = \mathbf{K}$$

de donde se infiere que si la presión dinámica se incrementa, la presión estática disminuye.

En resumen, que si las partículas de aire aumentan su velocidad será a costa de disminuir su presión y viceversa, o lo que es lo mismo: *para cualquier "parcela" de aire, alta velocidad implica baja presión y baja velocidad supone alta presión.* Como curiosidad, esto ocurre a velocidades inferiores a la del sonido (Mach 1) pues a partir de esta ocurren otros fenómenos que afectan de forma importante a esta relación.

## 1.2 Efecto Venturi y la 3ª Ley del movimiento de Newton.

Otro científico, Giovanni Battista Venturi, comprobó experimentalmente que al pasar por un estrechamiento las partículas de un fluido aumentan su velocidad (tubo Venturi).

La 3ª Ley del movimiento de Newton afirma:

*"Para cada fuerza de acción hay una fuerza de reacción igual en intensidad pero de sentido contrario"*

## 2. POR QUÉ VUELAN LOS AVIONES.

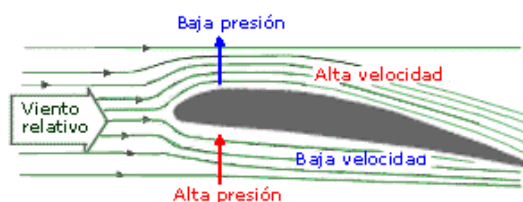
### 2.1. Teorema de Bernoulli y sustentación

Un objeto plano, colocado un poco inclinado hacia arriba contra el viento, produce sustentación; por ejemplo una cometa. Un perfil aerodinámico es un cuerpo que tiene un diseño determinado para aprovechar al máximo las fuerzas que se originan por la variación de velocidad y presión cuando este perfil se sitúa en una corriente de aire. Un ala es un ejemplo de diseño avanzado de perfil aerodinámico. Otro posible ejemplo sería el alerón de un fórmula 1, que aprovecha la fuerza del aire para "sujetarlo".

Veamos qué sucede cuando un aparato dotado de perfiles aerodinámicos (alas) se mueve en el aire (dotado de presión atmosférica y velocidad) a una cierta velocidad y con determinada colocación hacia arriba, de acuerdo con las leyes explicadas. El ángulo de ataque es el ángulo que tiene el ala (inclinación) con respecto al flujo de aire. Un

mayor ángulo de ataque hará que el avión suba rápidamente, aunque si sube en exceso, la aeronave entrará en pérdida.

El ala produce un flujo de aire en proporción a su ángulo de ataque (a mayor ángulo de ataque mayor es el estrechamiento en la parte superior del ala) y a la velocidad con que el ala se mueve respecto a la masa de aire que la rodea. De este flujo de aire, el que discurre por la parte superior del perfil (extradós) tendrá una velocidad mayor ([efecto Venturi](#)) que el que discurre por la parte inferior (intradós). Esa mayor velocidad implica menor presión por el ya explicado Teorema de Bernoulli.



Tenemos pues que la superficie superior del ala soporta menos presión que la superficie inferior. Esta diferencia de presiones produce una fuerza aerodinámica que empuja al ala de la zona de mayor presión (abajo) a la zona de menor presión (arriba), conforme a la [Tercera Ley del Movimiento de Newton](#).

Pero además, la corriente de aire que fluye a mayor velocidad por encima del ala, al confluir en el borde de salida con la que fluye por debajo, empuja a esta última hacia abajo, produciéndose una fuerza de reacción adicional hacia arriba. La suma de estas dos fuerzas es lo que se conoce por [fuerza de sustentación](#), que es la que mantiene al avión en el aire. La corriente de aire que produce el avión al desplazarse recibe el nombre de *viento relativo*. Es siempre paralelo a la trayectoria del vuelo y de dirección opuesta.

## 2.2 Factores que afectan a la sustentación.

La forma del perfil del ala: Hasta cierto límite, a mayor curvatura del perfil mayor diferencia de velocidad entre las superficies superior e inferior del ala y por tanto mayor diferencia de presión, o lo que es igual: mayor fuerza de sustentación. No obstante no hay que confundirse pensando que es necesario que el ala sea curvada por arriba y plana o cóncava por abajo para producir sustentación, pues un ala con un perfil simétrico también la produce. Lo que ocurre es que un ala ligeramente curvada entra en pérdida con un ángulo de ataque mucho mayor que un ala simétrica, lo que significa que tanto su sustentación como su resistencia a la pérdida son mayores.

La curvatura de un ala típica moderna es solo de un 1% o un 2%. La razón por la cual no se hace más curvada, es que un incremento de esta curvatura requeriría una superficie inferior cóncava, lo cual ofrece dificultades de construcción. Otra razón, es que una gran curvatura solo es realmente beneficiosa en velocidades cercanas a la pérdida (despegue y aterrizaje), y para tener más sustentación en esos momentos es suficiente con extender los [flaps](#) (alerones extensibles del ala usados durante el despegue y aterrizaje)

La superficie del ala: Cuanto más grandes sean las alas mayor será la superficie sobre la que se ejerce la fuerza de sustentación. Pero hay que tener en cuenta que perfiles muy curvados o alas muy grandes incrementan la resistencia del avión al ofrecer mayor superficie enfrentada a la corriente de aire

La densidad del aire: Cuanto mayor sea la densidad del aire, mayor es el número de partículas por unidad de volumen que cambian velocidad por presión y producen sustentación (factor  $\rho_0$  del [Teorema de Bernoulli](#)).

La velocidad del viento relativo: A mayor velocidad sobre el perfil, mayor es la sustentación. La sustentación es proporcional al cuadrado de la velocidad (factor  $u^2$  del teorema de Bernoulli), siendo por tanto este factor el que comparativamente más afecta a la sustentación.

El ángulo de ataque: Si se aumenta el ángulo de ataque es como si se aumentara la curvatura de la parte superior del perfil, o sea el estrechamiento al flujo de aire, y por tanto la diferencia de presiones y en consecuencia la sustentación. No obstante como ya hemos dicho, un excesivo ángulo de ataque puede provocar la entrada en [pérdida](#): la razón es que la corriente de aire sobre el extradós del ala no fluye de forma continua, produciéndose torbellinos, y entonces la corriente no queda adherida al ala. Esto produce una pérdida repentina de sustentación y un aumento de resistencia:

### 3. FUERZAS QUE ACTÚAN EN VUELO

Sobre un aeroplano en vuelo actúan una serie de fuerzas, favorables unas y desfavorables otras, siendo una tarea del piloto ejercer control sobre ellas para mantener un vuelo seguro. Aunque los expertos siguen debatiendo e investigando sobre aerodinámica, a nuestro nivel solo necesitamos conocer algunos conceptos fundamentales, empezando por las fuerzas que afectan al vuelo y sus efectos.

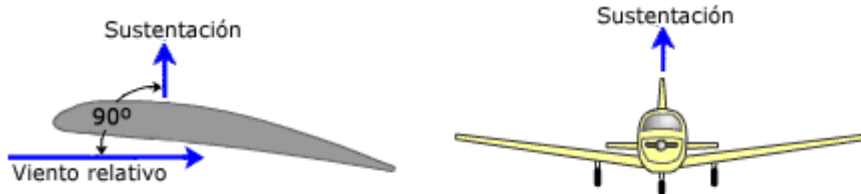
De todas las fuerzas que actúan sobre un aeroplano en vuelo, las básicas y principales porque afectan a todas las maniobras son cuatro: [sustentación](#), [peso](#), [empuje](#) y [resistencia](#). Estas cuatro fuerzas actúan en pares; la sustentación es opuesta al peso, y el empuje o tracción a la resistencia.

Un aeroplano, como cualquier otro objeto, se mantiene estático en el suelo debido a la acción de dos fuerzas: su peso, debido a la gravedad, que lo mantiene en el suelo, y la inercia o resistencia al avance que lo mantiene parado. Para que este aeroplano vuele será necesario contrarrestar el efecto de estas dos fuerzas negativas, peso y resistencia, mediante otras dos fuerzas positivas de sentido contrario, sustentación y empuje respectivamente. Así, el empuje ha de superar la resistencia que opone el avión a avanzar, y la sustentación superar el peso del avión manteniéndolo en el aire.



### 3.1 Sustentación.

Es la fuerza desarrollada por un perfil aerodinámico moviéndose en el aire, ejercida de abajo arriba, y cuya dirección es perpendicular al viento relativo y a la envergadura del avión (no necesariamente perpendiculares al horizonte). Se suele representar con la letra L del inglés Lift.



La sustentación L viene dada por la fórmula:

$$L = C_s \cdot (1/2 \rho_0 \|u\|^2) \cdot S$$

Donde  $C_s$  es el coeficiente de sustentación, el segundo término la presión dinámica y S la superficie del ala. De ahí se explica que, tal y como vimos antes, una mayor superficie produce una mayor sustentación del avión.

### 3.2. Peso

El peso es la fuerza de atracción gravitatoria sobre un cuerpo, siendo su dirección perpendicular a la superficie de la Tierra, su sentido hacia abajo, y su intensidad proporcional a la masa de dicho cuerpo. Esta fuerza es la que atrae al avión hacia la tierra y ha de ser contrarrestada por la fuerza de sustentación para mantener al avión en el aire.



### 3.3. Resistencia

La resistencia es la fuerza que impide o retarda el movimiento de un aeroplano. La resistencia actúa de forma paralela y en la misma dirección que el viento relativo, aunque también podríamos afirmar que la resistencia es paralela y de dirección opuesta a la trayectoria.



### 3.4. Empuje o tracción

Para vencer la inercia del avión parado, acelerarlo en la carrera de despegue o en vuelo, mantener una tasa de ascenso adecuada, vencer la resistencia al avance, etc... se necesita una fuerza: el empuje o tracción.

Esta fuerza se obtiene acelerando una masa de aire a una velocidad mayor que la del aeroplano. La reacción, de igual intensidad pero de sentido opuesto ([3ª ley del movimiento de Newton](#)), mueve el avión hacia adelante. En aviones de [hélice](#), la fuerza de propulsión la genera la rotación de la hélice, movida por el motor; en reactores, la propulsión se logra por la expulsión violenta de los gases quemados por la [turbina](#).

Esta fuerza se ejerce en la misma dirección a la que apunta el eje del sistema propulsor, que suele ser más o menos paralela al eje longitudinal del avión.



Es obvio que el factor principal que influye en esta fuerza es la potencia del motor, pero hay otros elementos que también influyen como pueden ser la forma y tamaño de la hélice, octanaje del combustible, densidad del aire, etc. Se habla de potencia en C.V. en motores convencionales, y de kilos o libras de empuje en reactores.