“Los sistemas formales como fundamento de las Matemáticas.”

Autor: ***Benito Moreno Peña***

Resumen: Dentro de la controversia sobre los fundamentos de las Matemáticas, los sistemas formales constituyen un punto de partida riguroso y sólido.
Sete artículo hace un repaso por la definición de sistema formal, exponiendo desde un punto de vista matemático su formulación.

Palabras clave: fundamentos de la Matemática, teorema, axioma

1. CONCEPTO DE SISTEMA FORMAL.

Un sistema formal (o sistema axiomático) se puede definir como un conjunto proposiciones llamadas axiomas y una serie de reglas para unirlas, que permite la deducción de nuevas proposiciones llamadas teoremas.

La aplicación fundamental de los sistemas formales, como explicamos en la introducción, es la modelización de fenómenos naturales o sociales.

Así que por la misma definición, dentro de un sistema formal existen dos tipos de símbolos o enunciados:

- Axiomas, que son proposiciones que se suponen ciertas sin necesidad de ninguna demostración.

- Mediante las reglas de unión que se describan en el sistema, a partir de los axiomas iremos construyendo nuevas proposiciones, llamadas teoremas. Por tanto, los teoremas son demostrados a partir de los axiomas.

Para la modelización de un fenómeno, la elección de los axiomas la realiza el investigador, teniendo presente unas condiciones que son deseables para dicho conjunto de axiomas:

- Coherencia. Un sistema es coherente si no da lugar a teoremas falsos, es decir, si unos axiomas no contradicen a los otros.

- Complitud o completitud. Un sistema es completo si cualquier teorema que pueda expresarse dentro de él puede ser considerado cierto o falso a partir de los axiomas.

- Independencia. Por simplificar el sistema, es preferible no incluir un axioma si se puede deducir a partir de los otros. Si ningún axioma se deduce a partir del resto, se dice dichos axiomas son independientes.

- Decidibilidad. Un conjunto de axiomas se dice que da lugar a un sistema decidible si existe un algoritmo que en tiempo finito nos indique si un enunciado es un teorema o no lo es.

2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

Se define un lenguaje como un conjunto compuesto por cadenas de longitud finita, formada por símbolos tomados de un alfabeto. Es decir, si $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es un alfabeto (cuyos elementos son llamados letras), el lenguaje estará formado por elementos de la forma $x = \alpha_{i_1} ... \alpha_{i_k}$, donde $i_1, ..., i_k$ están entre 1 y n (donde k podría valer también cero, dando lugar a una cadena vacía).

Se define el lenguaje universal para el alfabeto Σ, denotándose por Σ^*, al conjunto formado por todas las cadenas de longitud finita formadas por elementos de Σ.

Bajo este ambiente, definimos un sistema formal como una cuádrupla $S = (\Sigma, F, A, R)$, donde:

- Σ es un lenguaje.

- F es un subconjunto recursivo de Σ^*, llamado conjunto de fórmulas.

- A es un subconjunto recursivo de F llamado, conjunto de axiomas.

- $R = \{R_1,...,R_m\}$ es un conjunto finito de reglas de inferencia, es decir, $y = R_i(x_1,..,x_p)$, donde $x_1,...,x_p \in F$, y el resultado de aplicar R_i a estas cadenas será un elemento $y \in F$.

Considerando un sistema formal S, se define una demostración como una sucesión finita de fórmulas $d \equiv x_1,...,x_n$, de tal forma que $x_1 \in A$ (es un axioma) y la fórmula x_i es un axioma, o es obtenida a partir de un subconjunto de $\{x_1,...,x_{i-1}\}$ mediante una regla de inferencia perteneciente a R.

Una fórmula t se dice que es un teorema, si existe una demostración $d \equiv x_1,...,x_n$ de manera que $x_n = y$.

3. BIBLIOGRAFÍA.

- Carl B. Boyer. "Historia de la Matemática". Alianza Editorial.
- Y. Ershov. "Lógica matemática". Ed. Mir.
- J. Ferreiros. "Un episodio de la crisis de los fundamentos". Boletín de la RSME. Mayo-Agosto 2004.
- "Math World". mathworld.wolfram.com