"Problemas de optimización en Matemáticas."

Autor: ***Benito Moreno Peña***

Resumen: Los problemas infinitesimales han sido los causantes de la gran revolución matemática del siglo XVII.
En este artículo exponemos algunas líneas generales del los métodos variacionales.

Palabras clave: análisis variacional, optimización, problema isoperimétrico

1. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

El problema general que motiva el uso de métodos variacionales es considerar una función
$f : M \to IR$
donde M es un conjunto arbitrario.

Se trata de determinar condiciones sobre f y M para asegurar la existencia de mínimo. Por ejemplo, con condiciones de compacidad sobre M (exigiéndole estructura de espacio topológico) y de continuidad en f tenemos garantizada la existencia de dicho mínimo.

Otro problema estrechamente relacionado con éste, es determinar su unicidad y métodos para calcularlo. En este caso, condiciones apropiadas de la frontera de M y condiciones más fuertes sobre f, como pueda ser su diferenciabilidad nos determinan métodos de cálculo (por ejemplo, el método de los multiplicadores de Lagrange).

En este artículo se hace una breve referencia a la minimización de funciones reales definidas en un espacio normado E de dimensión infinita (generalmente se tratará de un espacio de funciones).

2. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO.

Mostraremos a modo de ejemplo el problema isoperimétrico: "De todas las curvas cerradas del plano de longitud dada L > 0, ¿cuál es la que encierra mayor área?”

Ya en la civilización egipcia se conocía que la solución es una circunferencia de longitud L. En Grecia, Zenodoros (200-100 a.C.) probó que tomando cualquier polígono de longitud L, su área era menor que la de la circunferencia. Esbocemos la idea de cómo se demostraría este problema:

Podemos considerar la curva mediante sus ecuaciones paramétricas

$$x = x(s)$$
$$y = y(s)$$

donde s recibe el nombre de parámetro arco, siendo $s \in [0, L]$.

Utilizando cálculos de Geometría Diferencial, se conoce que el área viene dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^L \left(x(s)y'(s) - x'(s)y(s)\right) ds$$

Haciendo uso del producto escalar de funciones

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

se puede sustituir en y se obtiene que

$$A = \frac{1}{2}\left(\langle x, y'\rangle - \langle x', y\rangle\right)$$

Posteriormente se haría uso de series de Fourier para calcular explícitamente estos productos escalares.

Este mismo problema, planteado sobre una superficie de IR^3 está todavía abierto en algunos casos.

La idea que nos ha de transmitir este ejemplo es que, para su resolución, es necesario hacer máxima o mínima una expresión donde las incógnitas son funciones.

3. BIBLIOGRAFÍA

- P. Blanchard y E. Br¨uning, Variational methods in Mathematical Physics, Springer- Verlag, Berlín, 1.992.

- G. Choquet, Topology,Academic Press, New York and London, 1966.