"Estudio del espectro en el álgebra de Banach $\Lambda(E)$"

Autor: ***Ricardo San Martín Molina***

Resumen: En este artículo se dan definiciones y resultados que nos llevarán a estudiar el espectro en el álgebra de Banach dada, con sus correspondientes demostraciones y corolarios.

Palabras clave: Matemáticas, Teoría de Operadores, Álgebra.

1. Estudio del espectro

En ciertas álgebras de Banach, la teoría acerca del espectro puede tener interesantes propiedades. En este trabajo, estudiaremos el espectro en el ambiente del álgebra de Banach □*(E),* donde *E* será un espacio de Banach complejo no nulo. Los resultados que veremos serán muy parecidos y se puede decir que nos centraremos en tres tipos de espacios, a saber: espacios normados, espacios de Banach y espacios de Hilbert en la parte final.

Recordemos las definiciones y teoremas básicos previos a toda esta teoría:

Definición:

Un *álgebra asociativa* sobre un cuerpo K es un espacio vectorial *A* sobre K, con multiplicación asociativa *ab* que es distributiva respecto a la suma (por lo que *A* es un anillo asociativo) y es compatible con el producto escalar:
$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$
Un *álgebra normada* sobre K es un álgebra asociativa *A* sobre K dotada de una norma $a \mapsto \|a\|$ tal que:
i) es una norma en el espacio vectorial *A*
ii) $\|ab\| \le \|a\|\|b\| \quad \forall a,b \in A$
Si además *A* es completa con respecto a la métrica asociada a la norma (es decir, es un espacio de Banach) entonces se dice que es un *álgebra de Banach*.

Definición:

Un elemento *x* de un álgebra de Banach *A* se dice un divisor topológico de cero en *A* si existe una sucesión $y_n \in A$ con $\|y_n\| = 1$ tal que $xy_n \to 0$ (divisor topológico de cero izquierda) o bien $y_n x \to 0$ (divisor topológico de cero derecha). Si se cumplen ambas condiciones decimos que *x* es un divisor topológico de cero junto.

Lema:

Todo divisor topológico de cero es singular. De hecho, si *x* es un divisor topológico de cero izquierda (derecha) entonces *x* no tiene inverso por la izquierda (derecha).

Definición:

Sean *E,F* espacios vectoriales topológicos sobre un cuerpo (de números reales o complejos). Definimos □*(E,F)*, como el conjunto de todas las aplicaciones lineales $T : E \to F$. Dadas *S,T* $\in$ □*(E,F)*, escribiremos *S=T* si *Sx=Tx* en cada punto $x \in E$.
Notamos □*(E)* ≡□***(E,E)***

Teorema:

Si *E* es un espacio normado, entonces $\mathcal{L}(E)$, es una álgebra normada con unidad el operador identidad I, $\|I\| = 1$. De hecho, si *E* es un espacio de Banach entonces $\mathcal{L}(E)$ es un álgebra de Banach.

■

Si *E* es un espacio normado (lo supondremos complejo y $E \neq \{\theta\}$) entonces $\mathcal{L}(E)$ es un álgebra normada con elemento unidad *I* tal y como acabamos de ver; si *E* es un espacio de Banach entonces $\mathcal{L}(E)$ es un álgebra de Banach y si *E* es un espacio de Banach reflexivo entonces la aplicación $T \mapsto T'$ es un isomorfismo de espacios vectoriales que preserva la norma de $\mathcal{L}(E)$ en $\mathcal{L}(E')$ tal que $(ST)' = T'S'$ para toda *S,T* en $\mathcal{L}(E)$. Finalmente, si E es un espacio de Hilbert entonces $\mathcal{L}(E)$ es una C*-álgebra.

A partir de ahora, si $T \in \mathcal{L}(E)$ escribiremos $\sigma(T)$ en lugar de $\sigma_{\mathrm{L(E)}}(T)$. Tal y como vimos en clase, los elementos *singulares* de $\mathcal{L}(E)$ son los divisores de cero, que pueden ser caracterizados de la siguiente forma:

Teorema:

Sea *E* un espacio normado y sea $T \in \mathcal{L}(E)$.
i) T es un divisor de cero por la izquierda en $\mathcal{L}(E)$ si y sólo si T no es inyectiva
ii) T es un divisor de cero por la derecha en $\mathcal{L}(E)$ si y sólo si *T(E)* no es densa en E.

Dem. i) Supongamos que *T* no es inyectiva. Sea y cualquier elemento no nulo en *E* tal que $Ty = \theta$, sea *f* una forma lineal continua no nula en *E* y definamos *S* $\in \mathcal{L}(E)$ como sigue:

$$Sx = f(x)y \quad (\mathrm{x} \in \mathrm{E})$$

Obviamente *TS=0*, luego *T* es un divisor de cero en $\mathcal{L}(E)$. El recíproco es trivial.
ii) Supongamos que *T(E)* no es densa en *E*. Sea $\mathrm{y} \notin \overline{\mathrm{T(E)}}$ y sea *f* una aplicación lineal continua en *E* tal que $f(y) \neq 0$ y $f = 0$ en T(E). Sea *z* un elemento no nulo de *E*. Definamos *S* $\in \mathcal{L}(E)$ como sigue:

$$Sx = f(x)z \quad (x \in E)$$

Entonces $STx = f(Tx)z = \theta$ para todo $x \in E$, de donde $Sy = f(y)z \neq \theta$, luego *T* es un divisor de cero por la derecha. El recíproco es de nuevo obvio.

■

Cada forma de "no invertibilidad" nos lleva a definir un correspondiente subconjunto del espectro:

Definición:

Sea *E* un espacio normado y sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Un número complejo λ se dice que es un *autovalor* de *T* si $T - \lambda I$ no es inyectiva, es decir, existe un vector x no nulo tal que $Tx = \lambda x$. El conjunto de dichos λ tal que el rango de $T - \lambda I$ no es denso se llama el *espectro comprimido* de *T*, y lo notaremos $\sigma_{com}(T)$ (aunque no existe una notación universalmente aceptada para todo este tipo de subconjuntos)

Corolario:

Si *E* es un espacio normado y $T \in \mathcal{L}(E)$ entonces:

$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ es un divisor de cero izquierda en $\mathrm{L}(\mathrm{E})\}$

$\sigma_{com}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ es un divisor de cero derecha en $\mathrm{L}(\mathrm{E})\}$

Obviamente $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ y $\sigma_{com}(T) \subset \sigma(T)$. No tenemos la certeza de que ninguno de estos dos conjuntos sea no vacío. Es interesante observar que: $\tau(aT + bI) = \{a\lambda + b : \lambda \in \tau(T)\}$, donde $\tau = \sigma_p, \sigma_{com}$ o σ y supuesto $\tau(T)$ no vacío, $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$

A continuación caracterizamos los divisores topológicos de cero izquierda:

Teorema:

Sea *E* un espacio normado y sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Equivalen:
i) *T* es un divisor topológico de cero izquierda en $\mathrm{L}(\mathrm{E})$
ii) Existe una sucesión $\mathrm{x_n}$ en *E* tal que $\|\mathrm{x_n}\| = 1$ y $T\mathrm{x_n} \to \theta$
iii) *T* no está inferiormente acotado.

Dem. De las propias definiciones se sigue que ii) y iii) son equivalentes.
$ii) \Rightarrow i)$ Sea $\mathrm{x_n}$ una sucesión de vectores unitarios tal que $T\mathrm{x_n} \to \theta$, sea $f \in E'$ con $\|f\| = 1$ y para cada n, definimos $S_n \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ mediante:

$$S_n x = f(x) x_n \quad (x \in E)$$

Claramente, $\|S_n\| = \|f\|\|x_n\| \to 0$. Por tanto, T es un divisor topológico de cero izquierda en $\mathrm{L}(\mathrm{E})$.
$i) \Rightarrow ii)$ Sea S_n una sucesión en $\mathrm{L}(\mathrm{E})$ tal que $\|S_n\| = 1$ y $\|TS_n\| \to 0$. Para cada n, sea y_n un vector unitario tal que $\|S_n y_n\| \geq \frac{1}{2}$. Entonces $x_n = \|S_n y_n\|^{-1} S_n y_n$ es un vector unitario y

$$\|Tx_n\| = \|S_n y_n\|^{-1} \|TS_n y_n\| \leq 2\|TS_n\| \to 0$$

Definición:

Sea *E* un espacio normado y sea $T \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. Un número complejo λ se dice que es un *valor propio aproximado* de *T* si existe una sucesión x_n en E tal que $\|x_n\| = 1$ y $Tx_n - \lambda x_n \to \theta$. Al conjunto de todos los λ verificando tal propiedad lo llamaremos el *espectro de puntos aproximados* de *T*, notándolo por $\sigma_{ap}(T)$.

Corolario:

Si *E* es un espacio normado y $T \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$, entonces:

$$\begin{aligned}\sigma_{ap}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es un divisor de cero izquierda en } \mathrm{L}(\mathrm{E})\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no está inferiormente acotada}\}\end{aligned}$$

Claramente, $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$ y $\sigma_{ap}(aT + bI) = \{a\lambda + b : \lambda \in \sigma_{ap}(T)\}$ suponiendo $a \neq 0, \sigma_{ap}(T) \neq \varnothing$. Cuando *E* es un espacio de Banach no vacío, σ_{ap} es obviamente no vacío también.

Teorema:

Sea *E* un espacio de Banach y $T \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. Entonces $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$

Dem. Sea $\lambda \in \partial\sigma(T)$, entonces $T - \lambda I$ es un divisor topológico de cero izquierda en $\mathrm{L}(\mathrm{E})$. Por tanto, $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ por el corolario anterior. Nótese que de hecho $\sigma_{ap}(T)$ contiene todos los $\lambda \in \sigma(T)$ tales que $|\lambda| = r(T)$

■

Teorema:

Sea *E* un espacio normado y sea $T \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) *T* es un divisor topológico de cero derecha en $\mathrm{L}(\mathrm{E})$
ii) *T'* es un divisor topológico de cero izquierda en $\mathrm{L}(\mathrm{E})$
iii) Existe una sucesión $f_n \in E' : \|f_n\| = 1, f_n \to 0$ uniformemente en $\mathrm{T}(\mathrm{E}_1) : E_1 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$

Dem. $i) \Rightarrow ii)$ Si $S_n \in \mathrm{L}(\mathrm{E}) : \|\mathrm{S_n}\| = 1,\ \|\mathrm{S_n}T\| \to 0$ entonces $\|\mathrm{S_n}'\| = 1$ y $\|\mathrm{T'S_n}'\| = \|(\mathrm{S_n}T)'\| = \|S_n T\| \to 0$
$ii) \Rightarrow i)$ Por los resultados anteriores, existe una sucesión $f_n \in E' : \|f_n\| = 1,\ \|T' f_n\| \to 0$
Fijemos un $z \in E$ de norma 1 y para cada *n* definimos $S_n \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ como sigue:

$$S_n x = f_n(x) z \quad (x \in E)$$

Luego $\|S_n\| = \|f_n\| \|z\| = 1$, y por otro lado:

$$S_n T x = f_n(Tx) z = [(f_n \circ T)(x)] z = [(T' f_n)(x)] z$$

Y concluímos que $\|S_n T\| = \|T' f_n\| \to 0$

$ii) \Leftrightarrow iii)$ Basta observar que si $f_n \in E' : \|f_n\| = 1$ entonces:

$$\|T' f_n\| = \|f_n \circ T\| = \sup\left\{|f_n(Tx)| : x \in E_1\right\}$$

■

En vista de este teorema y el último corolario, el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T - \lambda I$ es un divisor topológico de cero derecha es justo el conjunto $\sigma_{ap}(T')$.

Teorema:

Sea *E* un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Las siguientes condiciones sobre *T* son equivalentes:
i) *T* es singular
ii) *T* es o bien un divisor de cero derecha o bien un divisor topológico de cero izquierda en $\mathcal{L}(E)$

Dem. Supongamos que *T* no es ninguna de las dos. Entonces *T(E)* es denso en *E* y *T* está inferiormente acotado (tal y como vimos en los teoremas anteriores). Entonces *T* es inyectiva y *T(E)* es cerrado. Por tanto *T* es biyectiva, y la continuidad de la inversa viene "gratis" con acotación inferior (Teorema de la aplicación abierta nuevamente). Luego *T* es inversible. La implicación hacia el otro lado es trivial.

■

Corolario:

Sea *E* un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$. Entonces:

$$\sigma(T) = \sigma_{com}(T) \cup \sigma_{ap}(T)$$

Dem. Inmediata por el último teorema y los dos últimos corolarios.

■

Corolario:

Sea *E* un espacio de Banach reflexivo y sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Si *T* es singular pero no es un divisor de cero en $\mathcal{L}(E)$, entonces *T* es un divisor topológico de cero derecha e izquierda.

Dem. Por el penúltimo teorema, *T* es un divisor topológico de cero izquierda en $\mathcal{L}(E)$. Como *E* es reflexivo, *T'* satisface las mismas hipótesis relativas a $\mathcal{L}(E')$, luego también *T'* es divisor topológico de cero izquierda en $\mathcal{L}(E')$. Luego *T* es también un divisor topológico de cero derecha.

■

Corolario:

Sea *E* un espacio de Banach reflexivo y sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Si *T* es inyectiva y *T(E)* es densa, entonces *T* es un divisor topológico de cero izquierda y derecha.

Dem. Es consecuencia del último corolario: *T* no es un divisor de cero, pero es obviamente singular.

■

Este último resultado motiva la siguiente definición de nuevos tipos de espectro:

Definición:

Sea *E* un espacio normado y $T \in \mathcal{L}(E)$. El *espectro residual* de *T*, $\sigma_r(T)$, es el conjunto de todos los números complejos λ tales que $T - \lambda I$ es inyectiva pero su rango no es denso en *T(E).* Es decir:

$$\sigma_r(T) = \sigma_{com}(T) \setminus \sigma_p(T)$$

El *espectro continuo* de *T*, $\sigma_C(T)$, es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T - \lambda I$ es inyectiva, tiene rango denso, pero no es singular. Esto es:

$$\sigma_C(T) = \sigma(T) \setminus \left\{ \sigma_{com}(T) \cup \sigma_p(T) \right\}$$

Es por tanto obvio que se tiene la igualdad con uniones disjuntas:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_C(T) \cup \sigma_r(T)$$

Observación:

En vista de la anterior definición y los resultados vistos hasta ahora podemos resumir:

Dado $\lambda \in \mathbb{C}$,

$\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow T - \lambda I$ es un divisor de cero izquierda
$\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow T - \lambda I$ es un divisor de cero derecha pero no un divisor de cero izquierda
$\lambda \in \sigma_C(T) \Leftrightarrow T - \lambda I$ es singular pero no es un divisor de cero

Para que $T \in \mathcal{L}(E)$ sea inversible (*E* es un espacio normado), es necesario y suficiente que *T* sea inferiormente acotada y sobreyectiva. En otras palabras, *T* es singular si y sólo si:

i) *T* no está inferiormente acotada
ó
ii) *T* no es sobreyectiva.

La condición i) es equivalente a que *T* sea un divisor topológico de cero izquierda. Nuestro próximo objetivo será mostrar que, cuando *E* es un espacio de Banach, ii) equivale a que *T* sea un divisor topológico de cero derecha en $\mathcal{L}(E)$.

Lema:

Sea *E* un espacio normado, $T \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ y supongamos que *T'* está inferiormente acotada. Entonces $\overline{T(\mathrm{E}_1)}$ es un entorno de cero, donde $E_1 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$

Dem. Sea *M>0* con $\|T'f\| \geq M\|f\| \quad \forall f \in E'$. Veamos que $\overline{T(E_1)}$ contiene la bola $\{y \in E : \|y\| \leq M\}$

Supongamos que $y \notin \overline{T(E_1)}$, será suficiente ver que $\|y\| \geq M$. Puesto que $\overline{T(E_1)}$ es cerrado y convexo, por el Teorema de Hahn-Banach existe $f \in E'$ y un número real β tal que $\mathrm{Re}\, f(y) > \beta$ y $\mathrm{Re}\, f(z) < \beta$ para todo $z \in \overline{T(E_1)}$. Luego:

$$|(T'f)(x)| < \beta \quad \forall x \in E_1$$

Por tanto, $\|T'f\| \leq \beta$. Concluímos que:

$$M\|f\| \leq \|T'f\| \leq \beta < \mathrm{Re}\, f(y) \leq |f(y)| \leq \|f\|\|y\| \Rightarrow M < \|y\|$$

■

Teorema:

Si *E* es un espacio de Banach y $T \in$ □*(E)*, entonces equivalen:
i) T es sobreyectiva
ii) T' está inferiormente acotada

Dem. $ii) \Rightarrow i)$ Supongamos que T' está inferiormente acotada. Por el lema, $\overline{T(E_1)}$ es un entorno de cero, donde $E_1 = \{x : \|x\| \leq 1\}$. Para cada $r > 0$ sea $E_r = \{x : \|x\| \leq r\}$, entonces:

$$\overline{T(E_r)} = \overline{T(rE_1)} = \overline{rT(E_1)} = r\overline{T(E_1)}$$

por lo que $\overline{T(E_r)}$ es un entorno de cero para todo $r > 0$. Así que T es una aplicación abierta, y en particular *T(E)* es un subespacio lineal abierto de E por lo que concluímos que *T(E)=E*

$i) \Rightarrow ii)$ Supongamos *T(E)=E*. Puesto que $T'f = f \circ T \quad \forall f \in E'$, tenemos que T' es inyectiva (de hecho, es consecuencia inmediata del Teorema de Hahn-Banach que T' es inyectiva si y sólo si T tiene el rango denso). Sea

$$S = \{f \in E' : \|T'f\| \leq 1\}$$

Para cada $x \in E$, el conjunto $\{f(x) : x \in S\}$ está acotado. Tomemos $x = Ty$ para un y conveniente, entonces:

$$|f(x)| = |f(Ty)| = |(T'f)(y) \leq \|T'f\|\|y\| \leq \|y\|$$

para toda $f \in S$. Por tanto, el conjunto S está acotado para cada punto en el espacio de Banach E, y por el Principio de acotación uniforme deducimos que S está acotado en norma.
Es decir, $\|f\| \leq M$ para toda $f \in S$. Concluiremos la demostración viendo que

$\|T'g\| \geq \frac{1}{M}\|g\|$ para toda $g \in E'$. Esta desigualdad es obvia cuando $T'g = 0$ (ya que T es inyectiva). En el caso $T'g \neq 0$, sea
$f = \|T'g\|^{-1} g \in S \Rightarrow \|f\| \leq M \Rightarrow \|g\| \leq M\|T'g\|$

■

Corolario:

Si *E* es un espacio de Banach y $T \in$ □*(E)*, equivalen las siguientes condiciones:

i) *T* no es sobreyectiva
ii) *T* es un divisor topológico de cero derecha en L (E)
iii) T' no está inferiormente acotada

Dem. Si *E* es un espacio normado, tenemos directamente $ii) \Leftrightarrow iii)$
T es un divisor topológico de cero derecha en L (E) $\Leftrightarrow$ T'es un divisor topológico de cero izquierda en L (E') $\Leftrightarrow$ T'no está inferiormente acotada. Por el teorema anterior, *i)* y *iii)* son también equivalentes.

■

De este corolario se sigue que:

$$\sigma_{ap}(T') = \{\lambda \in \square : T - \lambda I \text{ no es sobreyectiva}\}$$

Análogamente,

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \square : T' - \lambda I \text{ no es sobreyectiva}\}$$

Teorema:

Sea *E* es un espacio de Banach y $T \in$ □*(E)*, equivalen las siguientes condiciones:
i) *T* está inferiormente acotada
ii) T' es sobreyectiva

Dem. $i) \Rightarrow ii)$ Sea $M > 0$ tal que $\|Tx\| \geq M\|x\| \quad \forall x \in E$. Se sigue que T es inyectiva y que
(*) $Tx \mapsto x$
es una aplicación lineal continua bien definida de T(E) en E.
Dada $g \in E'$, buscamos $f \in E'$ tal que $T'f = g$. Definimos $f_o : T(E) \to \square$ de la siguiente forma: $f_o(Tx) = g(x)$. Así pues, f_0 es la composición de la aplicación (*) con *g*, luego es una aplicación continua. Por el Teorema de Hahn-Banach, tiene una extensión $f \in E'$. Por tanto: $g = f_0 \circ T = f \circ T = T'f$
$ii) \Rightarrow i)$ Si T' es sobreyectiva entonces como E' es un espacio de Banach , T''está inferiormente acotada. Se sigue de las propiedades del embebimiento canónico $E \to E''$ que también *T* está inferiormente acotada.

■

Para finalizar este trabajo, estudiaremos varios resultados similares hasta los ahora vistos en el caso particular de un espacio de Hilbert.

Teorema:

Sea *H* un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, equivalen:
i) *T* es inversible por la izquierda en $\mathcal{L}(\mathrm{H})$
ii) *T* está inferiormente acotada
iii) *T* no es un divisor topológico de cero izquierda en $\mathcal{L}(\mathrm{H})$

Dem. $i) \Rightarrow ii)$ Esto es cierto en general para *H* un espacio normado: si $S \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ con $\mathrm{ST=I} \Rightarrow \|\mathrm{x}\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\|\|Tx\| \quad \forall x \in H$
$ii) \Rightarrow i)$ Si T está inferiormente acotada, entonces es inyectiva, *T(H)* es un subespacio lineal cerrado de *H* y *T* aplica *H* de forma bicontinua en *T(H)*. Si $S : H \to H$ es la única aplicación lineal tal que $S(Tx) = x \ \forall x \in H$ y *S*=0 en $T(H)^{\perp}$, entonces $S \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ y *ST=I*
$ii) \Rightarrow iii)$ Trivial.

■

Corolario:

Sea *H* un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, equivalen:
i) *T* es inversible por la derecha en $\mathcal{L}(\mathrm{H})$
ii) *T* es sobreyectiva
iii) *T* no es un divisor topológico de cero por la derecha en $\mathcal{L}(\mathrm{H})$

Dem. En primer lugar observemos que es obvio que *T* es un divisor topológico de cero izquierda (derecha) si y sólo si T^{*} es un divisor de cero derecha (izquierda), y similar para divisores topológicos de cero. Así pues, *i)* y *iii)* son equivalentes.

La equivalencia entre *ii)* y *iii)* tan sólo requiere que *H* sea un espacio de Banach. Veamos entonces que *i) y ii)* son equivalentes:
$i) \Rightarrow ii)$ Obvio
$ii) \Rightarrow i)$ Sea *N* el *espacio anulador* de *T*, y sea T_0 la restricción de *T* a $N^{\perp}$. Puesto que $H = N \oplus N^{\perp}$, está claro que $T_0 : N^{\perp} \to H$ es un isomorfismo de espacios vectoriales continuo, y por el Teorema de la aplicación abierta, es bicontinuo. $Sx = T_0^{-1}x$ ($x \in H$) define un elemento de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ tal que *TS=I*.

■

El resultado que mostraremos a continuación es una caracterización muy útil de inversibilidad en el ambiente de los espacios de Hilbert.

Teorema:

Sea *H* un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathrm{L}\,(\mathrm{H})$, equivalen:
i) *T* es inversible
ii) *T* y T^* están inferiormente acotadas.
iii) *T* está inferiormente acotada y T^* es inyectiva.
iv) *T* está inferiormente acotada y $T(H)$ es densa.

Dem. $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$ es obvia.
$iii) \Rightarrow iv)$ De la igualdad $(T^* y \mid x) = (y \mid Tx)$ deducimos que el espacio anulador de T^* coincide con $T(H)^{\perp} = \overline{T(H)}^{\perp}$, luego T^* es inyectiva si y sólo si *T(H)* es densa.
$iv) \Rightarrow i)$ Inmediato.

■

Definición:

Sea $T \in \mathrm{L}\,(\mathrm{H})$, *H* un espacio de Hilbert. *T* se dice autoadjunto (o *Hermitiano*) si T^*=*T*

Lema:

Sea *H* un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathrm{L}\,(\mathrm{H})$. Entonces:
i) Si $(Tx \mid x) \geq 0$ para todo $x \in H$, entonces *T+I* es inversible.
ii) $T^*T + I$ es inversible para todo *T.*

Dem. i) En particular, $(Tx \mid x)$ es real para todo *x*, luego T^*=*T.*

$$\|(T+I)x\|^2 = \|Tx\|^2 + (Tx \mid x) + (x \mid Tx) + \|x\|^2 = \|Tx\|^2 + 2(Tx \mid x) + \|x\|^2 \geq \|x\|^2$$

luego *T+I* está inferiormente acotado. Por ser autoadjunto, debe ser inversible.

ii) $(T^*Tx \mid x) = (Tx \mid Tx) \geq 0$ para todo *x*

■

Lema:
Si *H* es un espacio de Hilbert y $T \in \mathrm{L}\,(\mathrm{H})$ es autoadjunto, entonces $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

Dem. Sea $\mu = a + ib \in \mathbb{C}$ con $b \neq 0$.

$$T - \mu I = (T - aI) - ibI = -b[-b^{-1}(T - aI) + iI]$$

Donde $-b^{-1}(T - aI)$ es también autoadjunto, luego está claro (basta un cambio de notación) que es suficiente ver que $T + iI$ es inversible para demostrar que lo es $T - \mu I$. Y usando el lema previo tenemos que:

$$(T + iI)^*(T + iI) = (T + iI)(T + iI)^* = T^2 + I$$, que es inversible.

■

Lema:

Sea *H* un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ autoadjunto. Definimos:

$$m = inf\{(Tx \mid x) : \|x\| = 1\}$$
$$M = \sup\{(Tx \mid x) : \|x\| = 1\}$$

Entonces $m, M \in \sigma(T)$

Dem. Veremos que $m \in \sigma(T)$, para *M* es similar sin más que considerar –*T*. Buscaremos una sucesión de vectores unitarios x_n tal que $\|(T - mI)x_n\| \to 0$. Definimos φ en *H* mediante:

$$\varphi(x, y) = ((T - mI)x \mid y)$$

Está claro que $\varphi(x, x) \geq 0$ para todo $x \in H$ con $\|x\| = 1$, luego φ satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y)$$

Nótese también que:

$$|\varphi(x, y)| \leq \|T - mI\| \ \|x\| \ \|y\|$$

Luego para todo *x* en *H* tenemos que:

$$\|(T - mI)x\|^4 = ((T - mI)x \mid (T - mI)x)^2 = [\varphi(x, (T - mI)x]^2$$
$$\leq \varphi(x, x)\varphi((T - mI)x, (T - mI)x) \leq \varphi(x, x)\|T - mI\| \ \|(T - mI)x\|^2$$

Esto implica que:

(*) $$\|(T - mI)x\|^2 \leq \varphi(x, x)\|T - mI\|$$

Por la propia definición de m, existe una sucesión x_n con norma unidad y tal que $\varphi(x_n, x_n) \to 0$. En vista de (*), concluímos que $\|(T - mI)x_n\| \to 0$

■

Lema:

Sea $T \in L(H)$ y *H* un espacio de Hilbert. Equivalen:

i) $(Tx \mid x) \geq 0$ para todo $x \in H$

ii) $T^* = T$ y $\sigma(T) \subset [0, \infty)$

Dem. $ii) \Rightarrow i)$ En el ambiente del resultado anterior, tenemos que $m \in \sigma(T)$ y por tanto $m \geq 0$

$i) \Rightarrow ii)$ En particular, $(Tx \mid x)$ es real para todo *x*, luego $T^* = T$ y por tanto $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

Dado $\beta < 0$, es suficiente ver que $T - \beta I$ es inversible. Pero

$$T - \beta I = -\beta(-\beta^{-1}T + I)$$

Donde $-\beta^{-1}T$ también satisface i), consecuencia de los resultados vistos anteriormente.

■

Teorema:

Sea *H* un espacio de Hilbert y sea $T \in L(H)$ autoadjunto. Definimos:

$$m = inf\{(Tx \mid x) : \|x\| = 1\}$$

$$M = \sup\{(Tx \mid x) : \|x\| = 1\}$$

Entonces $\{m, M\} \subset \sigma(T) \subset [m, M]$ luego $[m, M]$ es el menor intervalo que contiene a $\sigma(T)$.

Dem. Tenemos que $((T - mI)x \mid x) \geq 0$ para todos los *x* de norma uno, luego por el lema anterior: $\sigma(T - mI) \subset [0, \infty)$. Por otro lado,

$$\sigma(T - mI) = \{\lambda - m : \lambda \in \sigma(T)\}$$

y concluímos que $\sigma(T) \subset [m, \infty)$. De forma análoga demostramos que $\sigma(T) \subset (-\infty, M]$, luego finalmente $\sigma(T) \subset [m, M]$ y $\{m, M\} \subset \sigma(T)$ por el penúltimo lema.

■

Estos resultados motivan la siguiente definición:

Definición:

Sea *H* un espacio de Hilbert. Si *S,* $T \in L(H)$ son autoadjuntos y si $(Sx \mid x) \leq (Tx \mid x)$ para todo $x \in H$, escribimos $S \leq T$.

Es rutinario comprobar que $\leq$ define un orden parcial del conjunto de todos los operadores autoadjuntos de *H* (en particular, la propiedad de antisimetría resulta del hecho de que si $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in H \Rightarrow T = 0$).
Ahora podemos expresar el último lema como: "dado un operador autoadjunto *T*, se tiene que $T \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(T) \geq 0$"

BIBLIOGRAFÍA

- RICKART, C.: *General theory of Banach Algebras*. Van Nostrand, Princenton, 1960
- KADISON, R.V.: *Fundamentals of the theory of operator algebras. vol. I*, Academic Press, 1983