“El principio de Hamilton.”

Autor: ***Benito Moreno Peña***

Resumen: Dentro de este artículo se hace una descripción somera del principio de Hamilton, básico en diversas ramas de la Física y de las Matemáticas.

Palabras clave: Matemáticas, Física, Hamilton.

1. PRINCIPIO DE HAMILTON.

Supongamos que tenemos una partícula de masa 1 que se desplaza en el espacio euclídeo bajo la acción de una fuerza F. Se verifica la segunda ley de Newton

$$x''(t) = F(x(t))$$

donde $F : IR^3 \to IR^3$ y $x : [t_0, t_1] \to IR^3$ es una trayectoria.

Por la ecuación anterior, tenemos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Un caso particular, que es el que vamos a considerar, ocurre cuando F es conservativa, es decir, cuando deriva de un potencial.
En Física, una fuerza conservativa es interpretada como aquella que conserva la energía.

Hamilton construyó un funcional de la siguiente manera:

$$\mathcal{A} = \left\{ Y : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad Y(t_0) = p_1, Y(t_1) = p_2, Y \in C^1[t_0, t_1] \right\}$$

donde $p_1, p_3 \in IR^3$, por lo que el conjunto A es el conjunto de trayectorias posibles entre esos dos puntos.

Dado un $Y \in A$, la expresión de su energía cinética viene dada por

$$\frac{1}{2}\left(\dot{y}_1(t)^2 + \dot{y}_2(t)^2 + \dot{y}_3(t)^2\right) = (MY)(t)$$

y su energía potencial viene expresada por U(Y (t)).

La lagrangiana de la trayectoria viene expresada por

$$L(Y(t)) = M(Y(t)) + U(Y(t))$$

Podemos definir ahora

$$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\Phi(Y) = \int_{t_0}^{t_1} LY(t)dt$$

En métodos variacionales se establecen relaciones entre el funcional dado en y la función x que aparece al comienzo de este artículo.

En cuanto al principio de Hamilton, su enunciado es: ”La trayectoria $x \in A$ que sigue la partícula bajo la acción de la fuerza F para ir de p_1 a p_2 es aquella que hace estacionaria la acción extremal Φ”.

Existen autores que sustituyen en este principio el término ”estacionaria” por otros como ”mínima" o ”extrema”, aunque todos ellos implican que la derivada del funcional ha de anularse.

Un punto $y_0 \in A$ se dice estacionario cuando la primera variación de Φ en el punto y_0 en la dirección h, donde

$$h \in \{g : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad / \quad g(t_0) = 0, g(t_1) = 0, g \in C^1[t_0, t_1]\} = B$$

es cero.

La primera variación se define como

$$\delta\Phi(y_0; h) = \frac{d}{dt}\Phi(y_0 + th)_{|t=0}$$

Imponiendo que $\delta\Phi(y_0;h) = 0 \quad \forall h \in B$, hecho que implica la segunda ley de Newton, se dice que y0 es un punto estacionario de la acción integral de Hamilton.

2. BIBLIOGRAFÍA.

- P. Blanchard y E. Br¨uning, Variational methods in Mathematical Physics, Springer- Verlag, Berlín, 1.992.

- G. Choquet, Topology,Academic Press, New York and London, 1966.