“La Lógica como sistema formal dentro de las Matemáticas.”

Autor: ***Benito Moreno Peña***

Resumen: Dentro de este artículo se introduce el concepto de sistema formal, mostrando como la Lógica se puede basar en dicho concepto.

Palabras clave: Matemáticas, Lógica.

1. CONCEPTO DE SISTEMA FORMAL.

Se define un lenguaje como un conjunto compuesto por cadenas de longitud finita, formada por símbolos tomados de un alfabeto. Es decir, si $\Sigma = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ es un alfabeto (cuyos elementos son llamados letras), el lenguaje estará formado por elementos de la forma $x = \alpha_{i_1}...\alpha_{i_k}$, donde $i_1,...,i_k$ están entre 1 y n (donde k podría valer también cero, dando lugar a una cadena vacía).

Se define el lenguaje universal para el alfabeto Σ, denotándose por Σ^*, al conjunto formado por todas las cadenas de longitud finita formadas por elementos de Σ.

Bajo este ambiente, definimos un sistema formal como una cuádrupla $S = (\Sigma, F, A, R)$, donde:

- Σ es un lenguaje.
- F es un subconjunto recursivo de Σ^*, llamado conjunto de fórmulas.
- A es un subconjunto recursivo de F llamado, conjunto de axiomas.
- $R = \{R_1,...,R_m\}$ es un conjunto finito de reglas de inferencia, es decir, $y = R_i(x_1,..,x_p)$, donde $x_1,...,x_p \in F$, y el resultado de aplicar R_i a estas cadenas será un elemento $y \in F$.

Considerando un sistema formal S, se define una demostración como una sucesión finita de fórmulas $d \equiv x_1,...,x_n$, de tal forma que $x_1 \in A$ (es un axioma) y la fórmula x_i es un axioma, o es obtenida a partir de un subconjunto de $\{x_1,...,x_{i-1}\}$ mediante una regla de inferencia perteneciente a R.

Una fórmula t se dice que es un teorema, si existe una demostración $d \equiv x_1,...,x_n$ de manera que $x_n = y$.

2. LA LÓGICA COMO SISTEMA FORMAL.

Como ejemplo de la definición de sistema formal, podemos mostrar cómo se podría ver la Lógica como un sistema formal.

Para ello, consideraremos $S = (\Sigma, F, A, R)$, donde:

- El alfabeto será $\Sigma = \{\Rightarrow, \neg, (,), p, q, r\}$.
- El conjunto F de fórmulas se define inductivamente mediante las reglas:
    - Toda letra distinta a $\Rightarrow, \neg, (,)$ es una fórmula.
    - Si $x \in F$, entonces $\neg x \in F$.
    - Si $x, y \in F$ entonces $(x \Rightarrow y) \in F$
    - Una palabra es una fórmula solamente si se obtiene mediante los tres procedimientos descritos.
- El conjunto A de axiomas contendrá las tres fórmulas siguientes:
    - $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
    - $((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)))$
    - $((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
- El conjunto R de reglas de inferencia tiene los dos elementos:
    - Regla modus ponens: $R_1(x, (x \Rightarrow y)) = y$

- Regla de sustitución: $R_2(y,x)=z$, donde z se obtiene de sustituir en x toda aparición de la letra q por la cadena y .

Mediante este sistema formal, se pueden demostrar teoremas como $(p \Rightarrow p)$ y otros.

3. BIBLIOGRAFÍA.

- Y. Ershov. "Lógica matemática". Ed. Mir.
- "Math World". mathworld.wolfram.com