"Investigación operativa: aplicaciones en la optimización de costes"

Autor: ***Ricardo San Martín Molina***

Resumen: En este artículo veremos, a través de un ejemplo y su posterior desarrollo, cómo la rama matemática de la Investigación Operativa tiene una clara aplicación en el campo de la optimización de costes.

Palabras clave: Matemáticas, Investigación Operativa, Optimización de Costes, Teoría de Colas.

1. INTRODUCCIÓN

Partiendo del ejemplo siguiente, y su resolución paso a paso, veremos cómo la Investigación Operativa puede convertirse en una potente herramienta para optimizar costes y tiempos de espera:

La llegada de barcos cargados con cereales a un puerto sigue un proceso de Poisson con una tasa media de uno por hora. El tiempo de descarga de un grupo de estibadores tiene una distribución exponencial con media una hora y veinte minutos. Para poder descargar varios barcos simultáneamente cabe la posibilidad de contratar otros grupos de estibadores con un coste adicional cada uno de C_1€ por hora. El coste de tener un barco esperando a ser descargado es de C_2€ por barco cada hora. Se sabe que dos grupos de estibadores nunca cooperan para descargar el mismo barco.

Se trata de determinar los grupos de estibadores que deben contratarse para minimizar el coste total.

Aplicar los resultados al caso en que C_1=389, C_2=790.

Para el número de estibadores determinado en el apartado anterior, calcular las medidas de efectividad e interpretarlas.

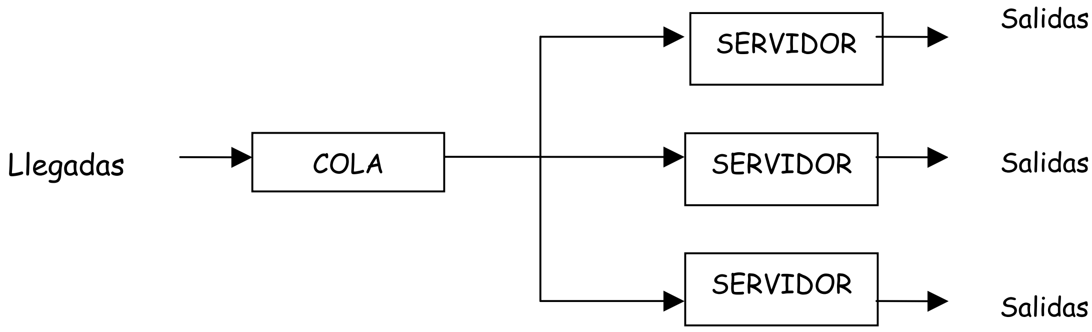
2. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

En primer lugar, identifiquemos el modelo y sus características:

Puesto que la llegada de los barcos sigue un proceso de Poisson y el tiempo de descarga de los estibadores tiene una distribución exponencial con media una hora y veinte minutos, estamos ante un modelo M/M/s , donde s denota el número de servidores (en nuestro caso grupos de estibadores que descargan los barcos).

En principio tenemos un modelo M/M/1 y nos planteamos la posibilidad de aumentar el número de servidores, pero siempre bajo la condición de minimizar los costes. Más concretamente, estudiaremos un modelo M/M/s/FCFS/∞/∞. Es decir, la disciplina de cola será de tipo "first come first served", lo que significa que los barcos son atendidos por orden de llegada. El quinto parámetro indica que supondremos el sistema con capacidad ilimitada y con infinitos clientes potenciales (barcos). Aunque esto no es totalmente real, lo supondremos así por simplicidad. Además, intuitivamente, los barcos que van llegando pueden acumularse en el mar sin problema hasta que sean atendidos, y en principio podrían llegar al puerto un número arbitrario de barcos (aunque repetimos que si nos atenemos a la realidad estricta, esto no es así exactamente).

La hipótesis de *"se sabe que dos grupos de estibadores nunca cooperan para descargar el mismo barco*" nos indica que estos grupos son independientes. Es decir, los servidores realizan su trabajo y no "ayudan" a otros servidores. Visto de otra forma, se trata de servidores en paralelo, véase el diagrama:



Finalmente, tenemos dos coeficientes C1 y C2 que determinan respectivamente el coste por hora de trabajo de cada servidor (grupo de estibadores descargando) y coste por hora de tener cada barco esperando a ser descargado.

A continuación determinaremos los grupos de estibadores que deben contratarse para minimizar el coste total. Para ello se han usado aplicaciones numéricas con Mathematica 5.0 que se adjuntan en un anexo con su código correspondiente además del archivo en el CD-Rom.

Para el caso más simple, s=1, tenemos una cola M/M/1. Recordemos que un sistema de colas M/M/1/FCFS/∞/∞ sigue las leyes siguientes:

1. La probabilidad de una llegada entre t y t+Δt puede darse por $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$. Una llegada incrementa el estado del sistema en 1.
2. La probabilidad de una salida entre t y t+Δt (siempre que haya algún elemento recibiendo servicio en el instante t) puede darse por $\mu\Delta t+o(\Delta t)$. Una salida disminuye en 1 el estado del sistema (número de elementos presentes en el tiempo t).
3. Las llegadas y salidas son sucesos independientes.
4. El estado estacionario se alcanza si $\lambda<\mu$, siendo λ y μ respectivamente las razones de llegada y servicio (número de llegadas o servicios por unidad de tiempo)
5. Dos o más sucesos (llegadas o salidas) no pueden ocurrir simultáneamente (es decir, la probabilidad de ocurrencia es un infinitésimo de orden superior a Δt).

El coste del sistema viene dado por dos factores principalmente: por un lado los clientes (barcos) esperando a ser servidos (descargados) y por otro los servidores trabajando (grupos de estibadores descargando los barcos que llegan).

Una vez identificado el modelo, debemos decidir qué tipo de M/M/s es el más conveniente, donde s nos dará el número de grupos que han de ser contratados.

Tenemos los siguientes parámetros:

$\lambda=1$ es la razón de llegada (número de barcos por hora)
$\mu=3/4$ es la razón de servicio (número de barcos que pueden ser servidos cada hora)

Nótese que al ser el tiempo de descarga de un grupo de estibadores de una hora y veinte minutos (4/3 hora), el tiempo medio de descarga en una hora es de ¾.

En el caso de un solo servidor, el sistema "explota". Los barcos se irán acumulando progresivamente y los estibadores estarán siempre ocupados. Dicho de otra forma:

$\mu < \lambda$, luego la razón de llegada es mayor que la razón de servicio. Obtenemos que:
$\rho= \min(1, \lambda/\mu) =1$, por lo que no hay distribución estacionaria en este caso y el servidor está el 100% del tiempo ocupado.

En general, estudiaremos el coste mediante la función:

$$\text{Coste}(s)= L\cdot C2+s\cdot C1$$

Donde:

$L=Ls+Lq$ es el número medio de barcos en el sistema. Esto es, número medio de barcos que están siendo servidos más los que están en cola. L depende de s.

s es el número de servidores (grupos de estibadores contratados)

Para $s\geq 2$, sí existe distribución estacionaria y estamos en condiciones de calcular L:

$\lambda/(s\mu) < 1$ ya que $4<3s$ para todo $s\geq 2$. Intuitivamente, la razón media de llegada es menor que la razón de servicio multiplicada por el número de servidores.

A partir de las fórmulas siguientes:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!\left(1-\frac{\rho}{s}\right)}}$$

$$L_q = \frac{\rho^{s+1}}{s\,s!\left(1-\frac{\rho}{s}\right)^2} P_0$$

calculamos L, donde :

$$L_s = \rho$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{3}$$

Obtenemos la función coste:

$$C1\,s + C2\left(\frac{4}{3} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1-s}}{\left(1-\frac{4}{3s}\right)^{2} s\, s!\left(\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{s}}{\left(1-\frac{4}{3s}\right)s!} + \sum_{n=0}^{s-1}\frac{(4/3)^{n}}{n!}\right)}\right)$$

Puesto que no es posible optimizarla explícitamente derivando, hemos creado una tabla que muestra sus valores con s desde 2 hasta 18, que son:

Número de servidores	Coste medio por hora
2	2 C1+2.4 C2
3	3 C1+1.47797 C2
4	4 C1+1.35922 C2
5	5 C1+1.33792 C2
6	6 C1+1.33409 C2
7	7 C1+1.33345 C2
8	8 C1+1.33335 C2
9	9 C1+1.33334 C2
10	10 C1+1.33333 C2
11	11 C1+1.33333 C2
12	12 C1+1.33333 C2
13	13 C1+1.33333 C2
14	14 C1+1.33333 C2
15	15 C1+1.33333 C2
16	16 C1+1.33333 C2
17	17 C1+1.33333 C2
18	18 C1+1.33333 C2

Recordemos que para el caso de un servidor, el coste se va haciendo más y más grande con el tiempo, ya que los barcos se acumulaban en la cola y el servidor se "saturaba". Es un coste de la forma C1+ t C2, que crece con el tiempo debido al coste que tiene tener cada vez más barcos esperando.

Por otro lado, observamos en los valores de la función coste que crece a medida que contratamos más grupos de estibadores (lo cual parece lógico) y el sumando referente a C2 disminuye progresivamente hasta estabilizarse a partir de 10 servidores. Luego está claro que a partir de ese número no optimizaremos costes.

Así pues, la función coste se optimizará dependiendo de los valores de C1 y C2, que se mueven en el intervalo (0,+∞) en principio. De forma analítica, podemos estudiar las diferentes desigualdades de los costes en función de C1 y C2, y así lo hemos hecho en la aplicación numérica.

La decisión de contratar un determinado grupo de estibadores vendrá dada por el cociente C1/C2 de la siguiente forma:

coste(2)<coste(3) si y sólo si C1/C2 > 0.922034
coste(3)<coste(4) si y sólo si C1/C2 > 0.118743
coste(4)<coste(5) si y sólo si C1/C2 > 0.0213038
coste(5)<coste(6) si y sólo si C1/C2 > 0.00383066
coste(6)<coste(7) si y sólo si C1/C2 > 0.000641671
coste(7)<coste(8) si y sólo si C1/C2 > 0.0000982096

Esto se interpreta de la siguiente forma:

A medida que contratamos más grupos de estibadores, el coste total se optimiza si y sólo si C2 es “mucho más grande” que C1 (precio por hora de cada servidor). Dicho de otra forma, si C1 y C2 son “parecidos” su cociente estará próximo a 1, y no compensará contratar a más grupos. Sin embargo, cuanto más grande sea la desproporción entre C1 y C2 (coste de tener los barcos esperando a ser descargados) deberemos contratar más grupos para optimizar.

A continuación, nos centraremos en el caso concreto:

C1= 389 €/h
C2= 790 €/h

Si nos remitimos a las anteriores desigualdades tenemos que el cociente es:

C1/C2=389/790= 0.492405

Por tanto, 2 grupos de estibadores resultan más caros que contratar 3 grupos, 3 grupos es más rentable que contratar 4 grupos y así sucesivamente. En definitiva, la opción que optimiza los costes es contratar 3 grupos de estibadores.

Podemos hacerlo de otra forma, calculando de nuevo L·C2+s·C1

$$L1 = \frac{r}{1 - r}$$

$$L2 = -\frac{4r}{-4 + r^2}$$

$$L3 = \frac{r\,(18 - 6r + r^2)}{-18 - 6r + r^2 + r^3}$$

y así sucesivamente.

Si sustituímos en L1 el valor ρ=4/3 obtenemos L1= -4 y esto no tiene sentido. Ya vimos que para el caso de un servidor no había distribución estacionaria, los barcos se iban acumulando porque saturaban al servidor y esto disparaba los costes con el paso del tiempo.

Sustituyendo en los otros valores obtenemos los siguientes costes medios por hora:

L2·C2+2·C1= 2674 €
L3·C2+3·C1= **2334.59** €
L4·C2+4·C1= 2629.79 €
L5·C2+5·C1= 3001.96 €
L6·C2+6·C1= 3387.93 €

Para 7 o más servidores, tenemos que el coste total siempre es mayor que 7·C1=7·389=2723 €

Luego hemos vuelto a obtener que la mejor opción es contratar a 3 grupos de estibadores.

Finalmente, calculemos las medidas de efectividad para s=3 e intepretémoslas:

$$r = \frac{l}{m} = \frac{4}{3}$$

$$r = \frac{r}{s} = 0.44444$$

s =3

Es decir, los servidores están ocupados el 44.44% del tiempo.

$$P0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^s}{s!\,(1-\rho)}} = 0.254237$$

La expresión para Pj es:

$$\begin{cases} \dfrac{0.254237\; 1.333333^j}{j!} & \text{si } j = 1, 2, \ldots, s \\ 0.127118\; 1.3333^j\; 3^{2-j} & \text{si } j \geq s \end{cases}$$

$$Lq = \left(\frac{r^s\,\rho}{s!\,(1-\rho)^2}\right) P0 = 0.144633$$

El número medio de barcos en cola es de 0.144633

$$Ls = r = 1.3333$$

El número medio de clientes que están siendo atendidos. Luego el número medio de barcos que está siendo atendido por cada servidor es r/3= 0.4444

$$L = Ls + Lq = 1.47797$$

L es el número medio de barcos en el sistema.

Para calcular los tiempos medios usaremos las fórmulas de Little:

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = 0.144633$$

Wq es el tiempo medio de espera (en horas) en cola de cada barco

$$Ws = \frac{Ls}{\lambda} = \frac{1}{\mu} = 1.3333$$

Ws es el tiempo medio de espera recibiendo servicio.

$$W = Wq + \frac{1}{\mu} = 1.47797$$

W es el tiempo medio de espera en el sistema (en horas) de cada barco.

$$EB = s\,\rho = 1.3333$$

E(B)=Número esperado de servidores ocupados

$$EI = s\,(1-\rho) = 1.66667$$

E(I)=Número medio de servidores libres

$$w(x) = 0.614406\, e^{-0.75\,x} + 0.338983\left(-e^{-1.25\,x} + e^{-0.75\,x}\right)$$

w(x) es la distribución del tiempo de espera en estado estacionario (función de densidad).

De forma similar y usando transformada de Laplace obtenemos la distribución del tiempo de espera en cola en estado estacionario (recordemos que la condición para que exista era que $\rho=\lambda/s\mu <1$)

$$w_q(x) = 0.22598\, e^{-1.25\,x} + 0.8192090395480227\,\delta(x) \qquad x \geq 0$$

donde δ(x) es la Delta de Dirac.

Finalmente, el siguiente teorema nos da información interesante acerca del proceso de salida (output process):

<u>Teorema de Burke:</u>

En un sistema de colas M/M/s en estado estacionario con razones de llegada y servicio λ,μ respectivamente, los tiempos entre salidas son independientes e idénticamente distribuídos según una variable aleatoria exponencial con media 1/λ. Es decir, el proceso de salida es de Poisson con parámetro λ.

De hecho, Burke (1968) demuestra que de todos los procesos con disciplina de cola FCFS, M/M/s es el único con esta propiedad.

Así pues, podemos concluir que en nuestro ejemplo concreto, el proceso de salida de los barcos una vez han sido descargados es de Poisson con parámetro $\lambda=1$.

3. BIBLIOGRAFÍA

- Ross, S.M. *Introduction to Probability Models*. Academic Press, San Diego, 1989.
- Tijms, H.C. *A first Course in Stochastic Models*. John Wiley and Sons, Chichester, 1994.
- Medhi, J: *Stochastic models in queueing theory*. Academic Press, Boston. 2003.
- Cooper, R. (1981) *Introduction to queuing theory.* North Holland, Nueva York.